Exercícios sobre Esferas

Exercícios

1. Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, quantas peças da mesma forma se pode confeccionar com este ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento.

a) 3
b) 9
c) 18
d) 21
e) 27

2. Aumentando em 10% o raio de uma esfera a sua superfície aumentará:

a) 21%.
b) 11%.
c) 31%.
d) 24%.
e) 30%.

3. (Fuvest) Uma superfície esférica de raio 13cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência.O raio desta circunferência, em cm é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

4. Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:

1385 km	Toda água do planeta 1,39 bilhões de km^3
406 km	Água doce do planeta 35,03 milhões de km^3
272 km	Água doce subterrânea 10,53 milhões de km^3
58 km	Água doce superficial 104,59 mil km^3

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é

a) $\frac{1}{343}$

b) $\frac{1}{49}$

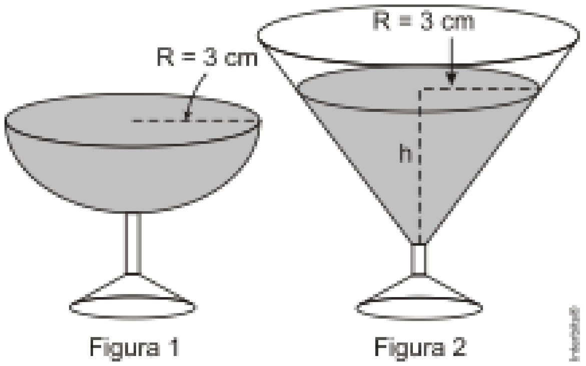
c) $\frac{1}{7}$

d) $\frac{29}{136}$

e) $\frac{136}{203}$

5. Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



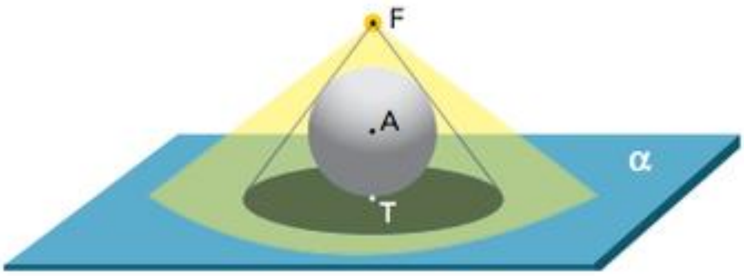
Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad e \quad V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério e servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33.
b) 6,00.
c) 12,00.
d) 56,52.
e) 113,04.

6. Uma esfera de centro A e raio igual a 3 dm é tangente ao plano a de uma mesa em um ponto T. Uma fonte de luz encontra-se em um ponto F de modo que F, A e T são colineares. Observe a ilustração:



Considere o cone de vértice F cuja base é o círculo de centro T definido pela sombra da esfera projetada sobre a mesa.

Se esse círculo tem área igual à da superfície esférica, então a distância FT, em decímetros, corresponde a:

a) 10
b) 9
c) 8
d) 7

Gabarito

1. E

Vamos chamar o raio da esfera inicial de R_1 e o das novas esferas de R_2.

O exercício diz que o raio das novas peças é um terço do raio da anterior, ou seja, $R_2 = \frac{1}{3}R_1$

Vamos lembrar que o volume da esfera é dado por $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. Para descobrir quantas peças novas podem se formar, vamos calcular quantas vezes o volume da esfera nova cabe dentro do volume da esfera inicial.

O volume da esfera inicial será: $V_1 = \frac{4\pi R_1^3}{3}$

O volume das novas esferas será:

$$V_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{R_1}{3}\right)^3 = \frac{4\pi R_1^3}{81}$$

Agora para descobrimos o número de esferas menores (n) vamos calcular a razão entre os volumes:

$$n = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4\pi R_1^3}{3}}{\frac{4\pi R_1^3}{81}} = \frac{4\pi R_1^3}{3} \cdot \frac{81}{4\pi R_1^3} \quad \rightarrow \quad n = 27$$

2. A

A área da esfera inicial sera dada por $A_1 = 4\pi R_1^2$ e como o novo raio será 10% maior que o primeiro, então $R_2 = 1{,}1 \cdot R_1$. Sendo assim podemos definir a nova área por:

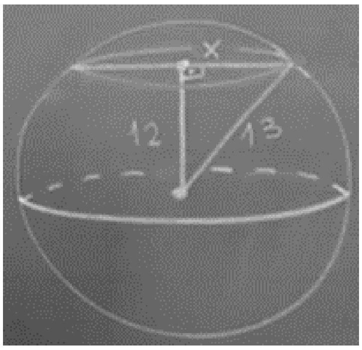
$$A_2 = 4\pi \cdot (1{,}1R_1)^2 = 4\pi \cdot 1{,}21 \cdot R_1^2$$

Se queremos saber o aumento, iremos descobrir através da diferença:

$$A_2 - A_1 = 4\pi \cdot 1{,}21R_1^2 - 4\pi R_1^2 = 4\pi R_1^2 (1{,}21 - 1) = 4\pi R_1^2 \cdot 0{,}21$$

Então temos que o aumento foi $21\% \ de \ A_1$.

3. E



Sendo x o raio que queremos descobrir, basta aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$13^2 = 12^2 + x^2$$

$$169 = 144 + x^2$$

$$x^2 = 169 - 144$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$x = 5$$

4. A

Sejam V_{ds} e V_d, respectivamente, o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta.

A razão pedida é dada por

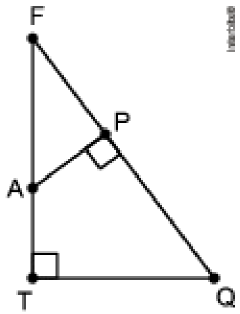
$$\frac{V_{ds}}{V_d} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{ds}^{\,3}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_d^{\,3}} = \left(\frac{r_{ds}}{r_d}\right)^3 = \left(\frac{29}{203}\right)^3 = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}$$

5. B

$$\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = \frac{1}{3} r \cdot 3^2 \cdot h \Leftrightarrow 3h = 18 \Leftrightarrow h = 6 \text{ cm}$$

6. C

Considere a figura.



Sabendo que a área da superfície esférica é igual à área do círculo de centro T e raio TQ, vem

$4 \cdot \pi \cdot \overline{AP}^2 = \pi \cdot \overline{TQ}^2 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^2 = \overline{TQ}^2 \Rightarrow \overline{TQ} = 6 \text{ dm}$.

Logo, como FQ é tangente à esfera no ponto P, segue que $\overline{TQ} = \overline{PQ}$.

Da semelhança dos triângulos FTQ e FPA, obtemos

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{FT}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{TQ}} \Leftrightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{FT}} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \overline{FP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FT}$$

Finalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo, FPA, encontramos

$$\overline{FA}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{FP}^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{FT} - \overline{AT}\right)^2 = \overline{PA}^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{FT}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{FT}^2 - 6 \cdot \overline{FT} + 3^2 = 3^2 + \frac{1}{4} \cdot \overline{FT}^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \overline{FT}^2 - 2 \cdot \overline{FT} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{FT} = 8 \text{ dm}$$